2.7.20 Řešení nerovnic metodou nulových bodů I

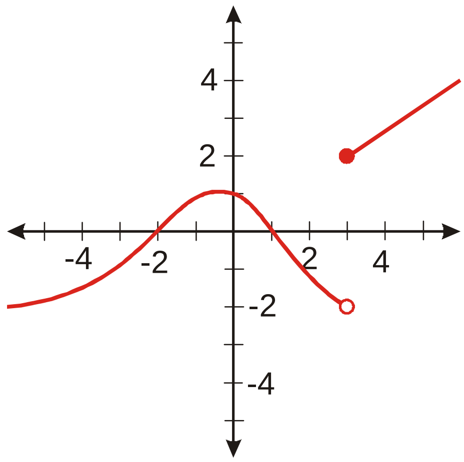
Předpoklady:

Pedagogická poznámka: V tuto hodinu platí hodně z poznámek k hodině předchozí, studenti mají problém s orientací v příkladu, který vyžaduje řešení podúloh. Opět můžete očekávat značné problémy, rozdílné rychlosti postupu, ale vzhledem k tomu, že studenti se potřebují ze všeho nejvíce naučit orientaci v příkladu, řešení příkladů na tabuli nepomáhá.

Řešení nerovnic z minulé kapitoly bylo poměrně náročné na neustálé sledování znamének a nerovností. Nešlo by to jinak?

Řešíme: $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$.

Nerovnici upravíme na tvar $3\sqrt{3x-x^2-2}-x \geq 0$.
Výraz vlevo můžeme brát jako předpis pro nějakou funkci.
Grafické řešení – hledáme, kdy je graf nad nebo pod osou *x*.
Jak může obecně graf v „nejhorším" případě funkce $y=f(x)$ vypadat?



Př. 1: Najdi řešení nerovnice $f(x)>0$ pro funkci $y=f(x)$ na grafu výše.

Řešením nerovnice $f(x)>0$ jsou všechna *x*, pro která je graf funkce $y=f(x)$ nad osou *x*.

- Hodnota funkce $y=f(x)$ je pro $x=0$ větší než nula $\Rightarrow$ 0 je řešením, stejně tak čísla kolem 0 až do místa, kde funkce přejde přes osu *x* (body $x=-2$ a $x=1$).
- Hodnota funkce $y=f(x)$ je pro $x=2$ menší než nula $\Rightarrow$ 2 není řešením, stejně tak čísla kolem 2 až do místa, kde funkce přejde přes osu *x* (body $x=1$ a $x=3$).
- a tak dále v dalších intervalech

$K=(-2;1)\cup\langle 3;\infty)$

Jak se funkce může dostat přes osu x?

- funkce má hodnotu 0 (body $x=-2$ a $x=1$), pro takové *x* platí $f(x)=0$ (což je rovnice), v konkrétním případě $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$ $\Rightarrow$ takové body najdeme, když budeme řešit rovnici $f(x)=0$.
- funkce je přetržená (bod $x=3$), u všech funkcí, které budeme používat na střední škole (mimo funkce $\operatorname{sgn}(x)$), může přetržení nastat jenom tam, kde funkce není definována $\Rightarrow$ takové body najdeme, když zjistíme definiční obor výrazů v nerovnici a stanovíme podmínky řešitelnosti

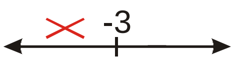
$\Rightarrow$ z předchozích úvah plyne:

Postup řešení nerovnice metodou nulových bodů (např. nerovnice $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$) :

1. Zjistíme, pro která *x* nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. (Kdy není definovaný libovolný výraz v nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$). **Našli jsme body přetržení.**
2. Vyřešíme rovnici $f(x)=0$ (např. $3\sqrt{3x-x^2-2}=x$) a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu *x*.**
3. Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechna další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
4. **Nerovnice je vyřešena.**

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x+3}\geq x+1$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice
levá strana: pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$
řešíme nerovnici $x+3\geq 0$
$x\geq -3$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\in\langle -3;\infty)$.

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{x+3}=x+1$ (abychom objevili nulové body nerovnice, kde funkce přechází přes osu *x*).

$\sqrt{x+3}=x+1 \quad /^2$

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(x+1)^2$

$x+3=x^2+2x+1$

$0=x^2+x-2$

$(x+2)(x-1)=0$

$x_1=-2$, $x_2=1$

Zkouška:

$x_1=-2$ $\quad L=\sqrt{x+3}=\sqrt{-2+3}=1$ $\quad P=x+1=-2+1=-1$

$L\neq P$

$x_1=1$ $\quad L=\sqrt{x+3}=\sqrt{1+3}=2$ $\quad P=x+1=1+1=2$

$L=P$

$\Rightarrow$ jediný kořen $x=1$

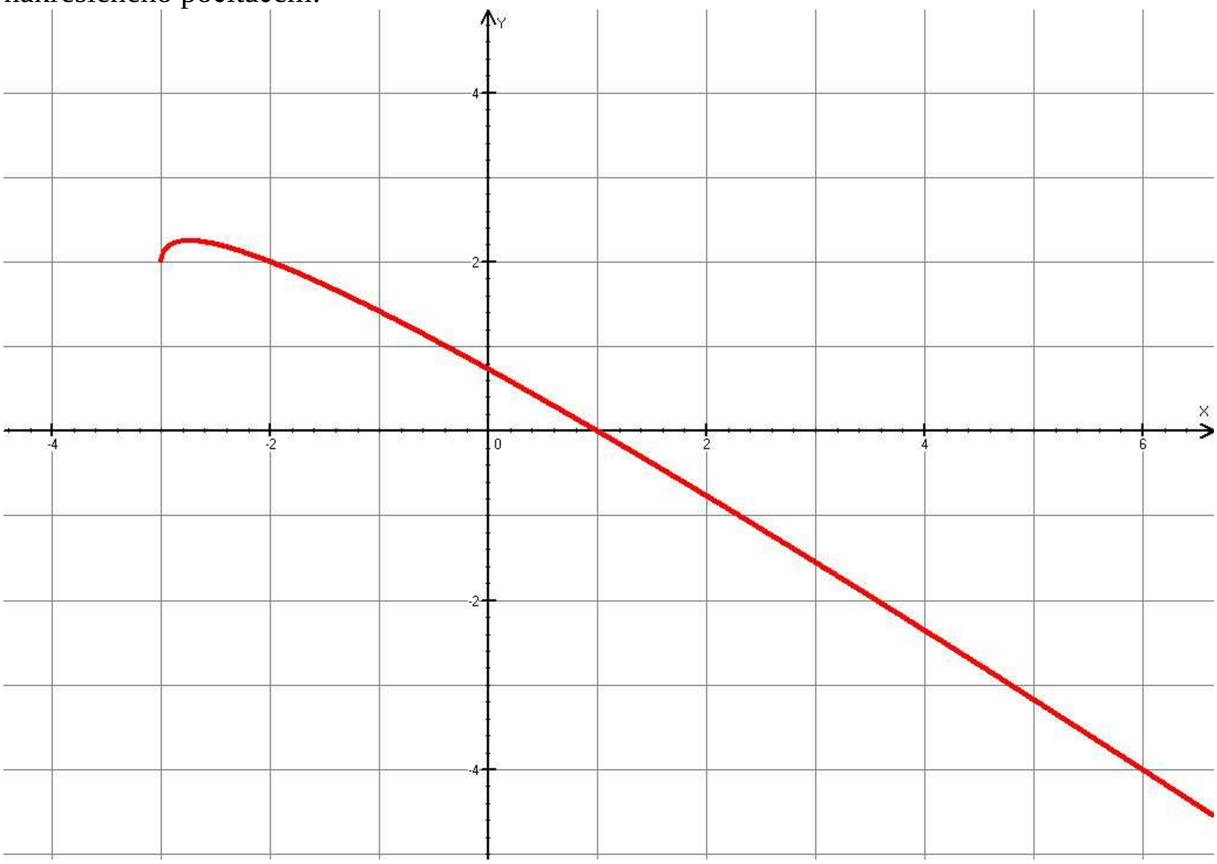
Doplníme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost.

- interval $(-\infty;-3)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval $(-3;1)$: vybereme číslo například 0:
  $\sqrt{x+3} \geq x+1 \qquad \sqrt{0+3} \geq 0+1$
  $\sqrt{3} \geq 1$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-3;1)$ je řešením
- interval $(1;\infty)$: vybereme číslo například 6 (kvůli odmocňování):
  $\sqrt{x+3} \geq x+1 \qquad \sqrt{6+3} \geq 6+1$
  $3 \geq 7$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(2;\infty)$ není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$, přidáme k nalezenému intervalu ještě nulové body $\Rightarrow$ $K = \langle -3;1 \rangle$.

Poznámka: Správnost výsledku si můžeme ověřit pomocí grafu funkce $y = \sqrt{x+3} - (x+1)$ nakresleného počítačem:



Dodatek: V druhém kroku při řešení rovnice $\sqrt{x+3} \geq x+1$ není zcela nutné dělat zkoušku, i když víme, že jeden z kořenů je zřejmě pouze zdánlivý. Naším úkolem v druhém kroku je najít všechny nulové body - pokud mezi ně započítáme i zdánlivý kořen, nic se nestane, jenom budeme mít ve třetím kroku jeden interval navíc.

Teď se můžeme vrhnout na nejhorší příšernost minulé hodiny.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$ .metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice
levá strana: pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$
řešíme nerovnici $3x-x^2-2 \geq 0$
hledáme kořeny rovnice $3x-x^2-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

$x_1=1$, $x_2=2$

Před x je záporné číslo – „kopeček“

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \langle 1;2 \rangle$.

2. Hledáme řešení rovnice $3\sqrt{3x-x^2-2}=x$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu x.

$\left(3\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2=(x)^2$

$3^2\left(\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2=x^2$

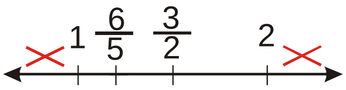
$9\left(3x-x^2-2\right)=x^2$

$27x-9x^2-18=x^2$

$10x^2-27x+18=0 \Rightarrow$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(-27)^2-4\cdot10\cdot18}}{2\cdot10}=\frac{27\pm\sqrt{9}}{20}=\frac{27\pm3}{20}$$

$x_1=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$, $x_2=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

Doplníme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;1)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval $\left(1;\frac{6}{5}\right)$: vybereme číslo například 1,1:

  $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$ $\qquad$ $3\sqrt{3\cdot1{,}1-(1{,}1)^2-2}\geq 1{,}1$

  $0{,}9\geq1{,}1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(1;\frac{6}{5}\right)$ není řešením
- interval $\left(\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right)$: vybereme číslo například 1,3:

  $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$ $\qquad$ $3\sqrt{3\cdot1{,}3-(1{,}3)^2-2}\geq 1{,}3$

  $1{,}37\geq1{,}3$ - platí $\Rightarrow$ interval $\left(\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right)$ je řešením

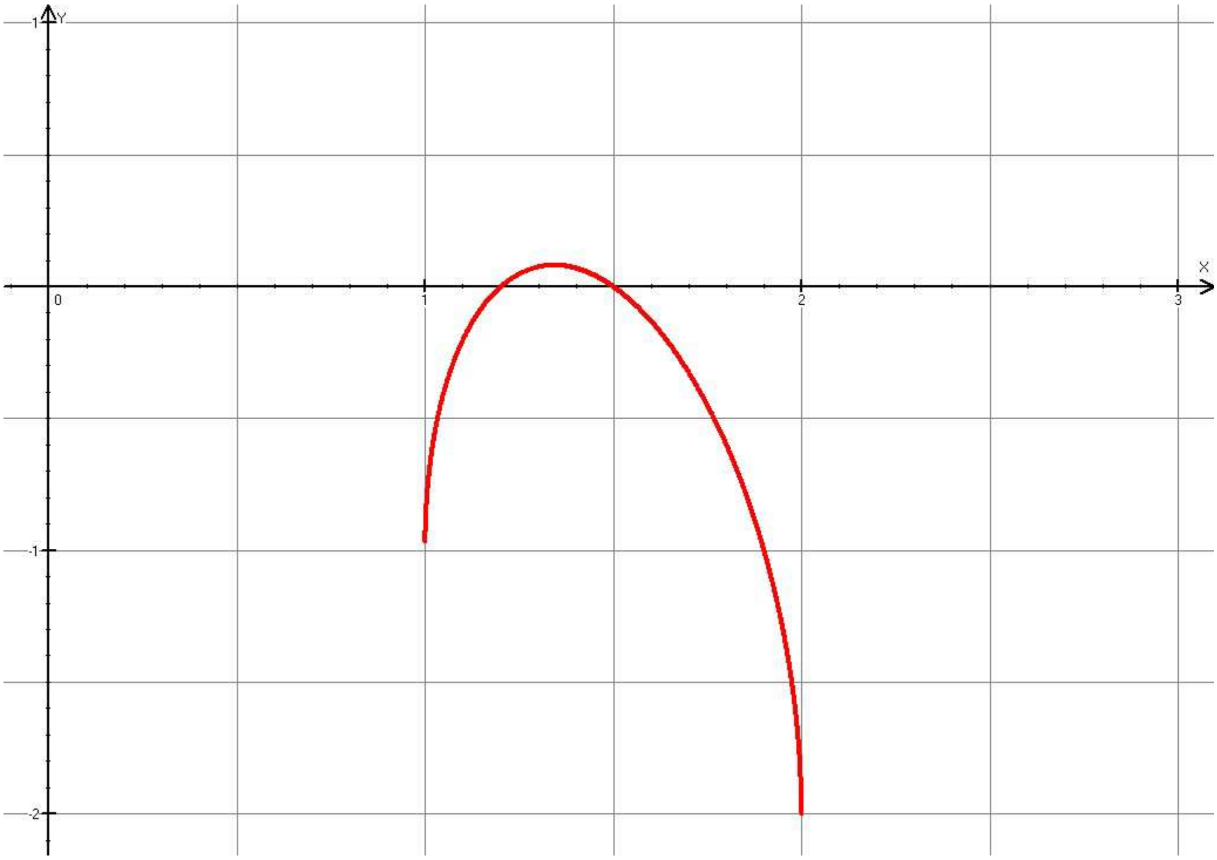
- interval $\left(\frac{3}{2};2\right)$: vybereme číslo například 1,7:

  $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$ $\qquad$ $3\sqrt{3\cdot 1,7-(1,7)^2-2} \geq 1,7$

  $1,37 \geq 1,7$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(\frac{3}{2};2\right)$ není řešením
- interval $(2;\infty)$: pro tato *x* není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$, přidáme k nalezenému intervalu ještě nulové body $\Rightarrow$ $K = \left\langle \frac{6}{5};\frac{3}{2} \right\rangle$.

Poznámka: Správnost řešení můžeme demonstrovat i pomocí grafu funkce $y = 3\sqrt{3x-x^2-2} - x$:



Př. 4: Petáková:
strana 14/cvičení 21 a) d)

Shrnutí: Při výpočtu metodou nulových bodů rozdělí body přetržení a nulové body osu *x* na intervaly, ve kterých ověříme platnost nerovnosti dosazením.